13/1/19

10) Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντ/νων μιας κανονικής επιφάνειας S με απεικόνιση Gauss N. Να δειχθεί ότι a) $N_u \times N_v = K X_u \times X_v$ $\quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$

b) $N_u \times X_v + X_u \times N_v = -2H X_u \times X_v$

<u>Λύση</u> a) $LX_u = -N_u$, $LX_v = -N_v$, $N_u = (N \circ X)_u$

$LX_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v$, $LX_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v$

$N_u \times N_v = LX_u \times LX_v = (a_{11} X_u + a_{21} X_v) \times (a_{12} X_u + a_{22} X_v) =$

$= a_{11} a_{22} X_u \times X_v + a_{21} a_{12} X_v \times X_u = a_{11} a_{22} X_u \times X_v - a_{12} a_{21} X_u \times X_v$

$= (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) X_u \times X_v = \det(a_{ij}) X_u \times X_v = \det L \, X_u \times X_v =$

$= K X_u \times X_v$

b) $N_u \times X_v + \overset{X_u \times N_v}{\cancel{N_v \times X_u}} = -LX_u \times X_u - X_u \times LX_v =$

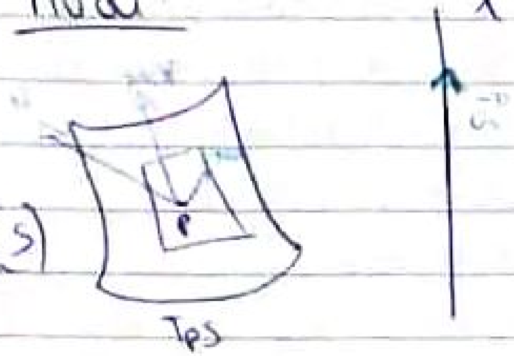
$= -(a_{11} X_u + a_{21} X_v) \times X_v - X_u \times (a_{12} X_u + a_{22} X_v) =$

$= -a_{11} X_u \times X_v - a_{22} X_u \times X_v = -(a_{11} + a_{22}) X_u \times X_v =$

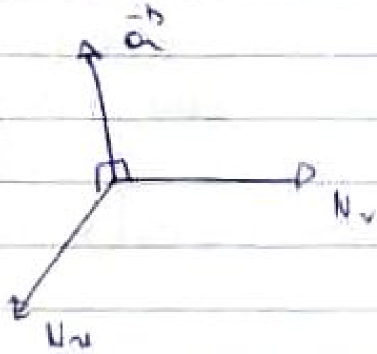
$= -\mathrm{trace}(a_{11}) X_u \times X_v = -\mathrm{trace} L \, X_u \times X_v = -2H X_u \times X_v$

(11) Αν όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα μιας κανονικής επιφάνειας S είναι παράλληλα προς μια ευθεία l, τότε η καμπυλότητα Gauss της S είναι $K=0$

Λύση

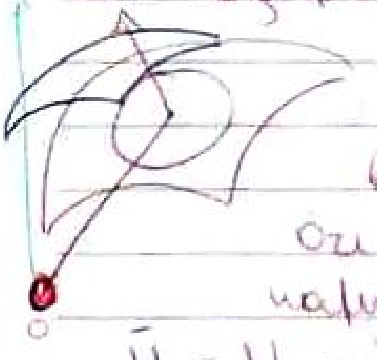


Έστω $\vec{a}$ μοναδιαίο διάνυσμα $\parallel l$ και $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων. Γνωρίζω ότι $\vec{a} \perp N \Rightarrow \langle N, \vec{a} \rangle = 0$
$\Rightarrow (\langle N, \vec{a}\rangle)_u = (\langle N, \vec{a}\rangle)_v = 0$
$\Rightarrow \langle N_u, \vec{a}\rangle = \langle N_v, \vec{a}\rangle = 0$
$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} N_u \perp \vec{a} \\ N_v \perp \vec{a} \end{array}\right\} \Rightarrow N_u \times N_v \parallel \vec{a}$



$\xRightarrow{N_u \times N_v = K X_u \times X_v} K X_u \times X_v \parallel \vec{a} \xRightarrow{\vec{a} \text{ εφαπτ.}}$
$\Rightarrow K X_u \times X_v = 0 \Rightarrow K = 0$

(12) Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων κανονικής επιφάνειας S με απεικ. Gauss N και $a \in \mathbb{R}^*$. Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια $\bar{X}(u,v) = X(u,v) + aN(u,v)$



α) Να εξεταστεί αν η $\bar{X}$ είναι κανονική

β) Αν η $\bar{X}$ είναι κανονική να δειχθεί ότι η καμπυλότητα Gauss και η μέση καμπυλότητα είναι αντίστοιχα $\bar{K} = \dfrac{K}{1-2Ha+Ka^2}$, $\bar{H} = \dfrac{H - Ka}{1-2Ha+Ka^2}$

Λύση: α) $\bar{X}_u = X_u + aN_u$, $\bar{X}_v = X_v + aN_v$

$\bar{X}_u \times \bar{X}_v = (X_u + aN_u) \times (X_v + aN_v) = X_u \times X_v + aX_u \times N_v +$
$+ aN_u \times X_v + a^2 N_u \times N_v = X_u \times X_v + a(N_u \times X_v + N_v \times X_u) +$
$+ a^2 N_u \times X_v = X_u \times X_v - 2Ha X_u \times X_v + a^2 K X_u \times X_v$

Άρα $\bar{x}_u \times \bar{x}_v = (1-2Ha+ka^2)\underbrace{x_u \times x_v}_{\neq 0}$

$1-2Ha+ka^2=0 \iff \left(\frac{1}{a}\right)^2-2H\left(\frac{1}{a}\right)+k=0$ Το χαρακτηριστικό πολ/μο της απεικόνισης Weingarten είναι

$\chi_1(t)=t^2-2Ht+k$

$1-2Ha+k_1a^2=0 \iff \chi_1\left(\frac{1}{a}\right)=0 \iff \frac{1}{a}$ είναι κύρια καμπυλότητα

Απάντηση: Η $\bar{x}$ είναι κανονική $\iff \frac{1}{a}$ δεν είναι κύρια καμπυλότητα σε κανένα σημείο

β) $\boxed{\bar{N}_u \times \bar{N}_v = \bar{k}\,\bar{x}_u \times \bar{x}_v}$, όπου $\bar{N}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο της $\bar{x}$ $\bar{N}=\pm\frac{\bar{x}_u \times \bar{x}_v}{\|\bar{x}_u \times \bar{x}_v\|}=\pm\frac{(1-2Ha+ka^2)\,x_u \times x_v}{|1-2Ha+ka^2|\,|x_u \times x_v|}$

Μπορώ να υποθέσω ότι $\boxed{\bar{N}=N}$

$\bar{N}_u=N_u$, $\bar{N}_v=N_v$

$\iff N_u \times N_v=\bar{k}(1-2Ha+ka^2)x_u \times x_v \iff$

$\iff k x_u \times x_v=\bar{k}(1-2Ha+ka^2)x_u \times x_v \iff k=\bar{k}(1-2Ha+ka^2)$

$\iff \boxed{\bar{k}=-\frac{k}{1-2Ha+ka^2}}$

$\bar{N}_u \times \bar{x}_v+\bar{x}_u \times \bar{N}_v=-2\bar{H}\,\bar{x}_u \times \bar{x}_v \iff N_u \times (x_v+aN_v)+(x_u+aN_u)\times N_v$

$=-2\bar{H}(1-2Ha+ka^2)x_u \times x_v \iff N_u \times x_v+aN_u \times x_v+x_u \times N_v+$

$+aN_u \times N_v=-2\bar{H}(1-2Ha+ka^2)x_u \times x_v \iff N_v \times x_v+x_u \times N_v+2aN_u \times N_v$

$=-2\bar{H}(1-2Ha+ka^2)x_u \times x_v \iff -2Hx_u \times x_v+2akx_u \times x_v=$

$=-2\bar{H}(1-2Ha+ka^2)x_u \times x_v \iff \boxed{\bar{H}=\frac{H-ak}{1-2Ha+ka^2}}$

Εφαρμογές (1) $\frac{\bar{K}}{\bar{H}} = \frac{K}{H-Ka} \Rightarrow \frac{\bar{H}}{\bar{K}} = \frac{H-Ka}{K} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\bar{H}}{\bar{K}} = \frac{H}{K} - a$

Αν $\frac{H}{K}$ = σταθ. $\Rightarrow \frac{\bar{H}}{\bar{K}}$ = σταθ.

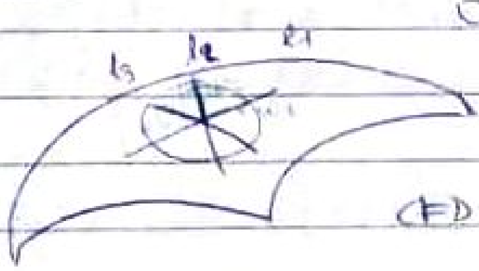
Έστω ότι η S έχει σταθερή μέση καμπυλότητα $H \neq 0$. Επιλέγω $a = \frac{1}{2H}$. Η $\bar{X}$ έχει -"- Gauss

$\bar{K} = \frac{K}{1-1+a^2K} = \frac{1}{a^2}$

Θέμα εξετάσεων !

(13) Υποθέτουμε ότι από σημείο P κανονικής επιφάνειας S διέρχονται 3 ευθείες που περιέχονται στην S. Αποδείξτε ότι το σημείο P είναι ισόπεδο.

Λύση



$0 \neq \vec{w} = aX_u + bX_v$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση $\Leftrightarrow II(\vec{w}) = 0 \Leftrightarrow$

$ea^2 + 2fab + gb^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2f\frac{a}{b} + g = 0$ ή $e + 2f\frac{b}{a} + g\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0$

Λόγω υπόθεσης η εξίσωση το πολύ 2ου βαθμού (*) θα έχει 3 τουλ. διαφ. ρίζες. Άρα πρέπει $e = f = g = 0$ δηλ. το P ισόπεδο.

(4) Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με
$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ v - \frac{v^3}{3} + u^2v,\ u^2 - v^2\right),\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$

1) Δείξτε ότι η X είναι κανονική
2) Να υπολογιστούν οι κύριες καμπυλότητες

Λύση

1) $X_u = (1 - u^2 + v^2,\ 2uv,\ 2u)$
$X_v = (2uv,\ 1 - v^2 + u^2,\ -2v)$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1-u^2+v^2 & 2uv & 2u \\ 2uv & 1-v^2+u^2 & -2v \end{vmatrix} =$$

$= (-4uv^2 - 2u + 2uv^2 - 2u^3,\ -(-2v + 2uv^2 - 2v^3,\ -4u^2v),\ \begin{vmatrix} 1-u^2+v^2 & 2uv \\ 2uv & 1-v^2+u^2 \end{vmatrix} =$

$= [(1 - (u^2 - v^2)][1 + (u^2 - v^2)] - 4u^2v^2 =$
$= 1 - (u^2 - v^2)^2 - 4u^2v^2 = 1 - u^4 + 2u^2v^2 - v^4 - 4u^2v^2 =$
$= 1 - u^4 - 2u^2v^2 - v^4 = 1 - (u^2 + v^2)^2 = (1 + u^2 + v^2)(1 - u^2 - v^2) =$
$= (-2u - 2u^3 - 2uv^2,\ 2v + v^3 + 2u^2v,\ (1+u^2+v^2)(1 - u^2 - v^2)) =$
$= \left(-2u(1+u^2+v^2),\ 2v(1+u^2+v^2)\ (1+u^2+v^2)(1 - u^2 - v^2)\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X_u \times X_v = (1 + u^2 + v^2)(-2u,\ 2v,\ 1 - u^2 + v^2)$

$\|X_u \times X_v\| = (1+u^2+v^2)\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1 + u^4 + v^4 - 2u^2 - 2v^2 + 2u^2v^2} =$
$= (1+u^2+v^2)\sqrt{1 + u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2} \Rightarrow \|X_u \times X_v\| = (1+u^2+v^2)^2 > 0$
$\Rightarrow$ Η X είναι κανονική

$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$, $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$

$E = \|X_u\|^2 = 1 + u^4 + v^4 - 2u^2 + 2v^2 - 2u^2v^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 =$
$= 1 + u^4 + v^4 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2v^2$

$\boxed{E = (1+u^2+v^2)^2}$, $\boxed{G = (1+u^2+v^2)^2}$, $G = \|X_v\|^2 \Leftrightarrow$ ...

$F = \langle x_u, x_v \rangle = 2uv - 2u^3v + 2uv^3 + 2uv - 2uv^3 + 2u^3v + 4uv =$
$= 4uv - 4u^2v^2 \Rightarrow \boxed{F = 0}$

$N = \dfrac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} \Leftrightarrow N = \dfrac{1}{1+u^2+v^2}(-2u, 2v, 1-u^2-v^2)$

$x_{uu} = (-2u, 2v, 2) = 2(-u, v, 1)$
$x_{uv} = (2v, 2u, 0) = 2(v, u, 0)$
$x_{vv} = (2u, -2v, -2) = 2(u, -v, -1)$

$e = \langle x_{uu}, N \rangle = \dfrac{2}{1+u^2+v^2}(1+2u^2+2v^2+1-u^2-v^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow e = \dfrac{2}{1+u^2+v^2}(1+u^2+v^2) \Rightarrow \boxed{e = 2}$

$f = \langle x_{uv}, N \rangle = \dfrac{2}{1+u^2+v^2}(-2uv + 2vu) \Rightarrow \boxed{f = 0}$

$g = \langle x_{vv}, N \rangle = \dfrac{2}{1+u^2+v^2}(-2u^2 - 2v^2 - 1 + u^2 + v^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow g = \dfrac{2}{1+u^2+v^2}(-1-u^2-v^2) \Rightarrow \boxed{g = -2}$

Άρα η καμπυλότητα Gauss είναι $K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{K = \dfrac{-4}{(1+u^2+v^2)^4} < 0}$

Η μέση καμπυλότητα είναι $H = \dfrac{Eg - \cancel{2Ff} + Ge}{2(EG - F^2)} =$
$\dfrac{2E - 2G}{2EG} \overset{E=G}{\Rightarrow} \boxed{H = 0}$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+u^2+v^2)^2 & 0 \\ 0 & (1+u^2+v^2)^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = E^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{E} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{E} \end{pmatrix}$$